# עקרון שובך היונים

אם מכניסים m יונים לn שובכים כאשר , אזי קיים שובך ובו לפחות 2 יונים.

## הסבר

אחרת, בכל שובך יש מספר1 של יונים, ולכן סה"כ מספר היונים בסתירה לכך ש

## פורמלית

לא קיימת פונ' חח"ע מקבוצה לקבוצה עבור .

# תרגיל

נתונה הקבוצה . הוכיחו שבכל בחירה של 6 מספרים מתוך A קיימים 2 שסכומם 9.

## פתרון

נגדיר "שובכים": . ואז בכל בחירה של 6 מספרים מתוך A, לפי עקרון שובך היונים יהיה שובך שממנו נבחר 2 מספרים ולפי הבנייה שלנו סכומם 9.

# עקרון שובך היונים המורחב

אם נכניס m יונים לn שובכים אז קיים שובך ובו לפחות יונים

## הוכחה

לכל נסמן ב את מספר היונים הנמצאות בתא הi. נניח בשלילה שלכל ⇦ , ולכן – סתירה(קיבלנו )

# דוגמאות

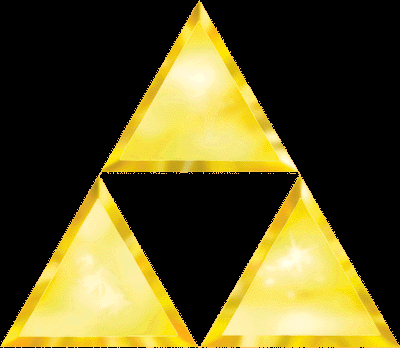
1. הוכיחו שבכל קבוצה של 12 מס' שלמים יש 2 שהפרשם מתחלק ב11.

## פתרון

נתבונן במס' מודולו 11, כלומר נגזיר 11 שובכים . כאשר נבחר 12 מספרים, לפי עקרון שובך היונים יהיה שובך ובו לפחות 2 מספרים, כלומר לפי הגדרת השובכים ל2 המספרים הללו יש אותה שארית בחלוקה ב11. במילים אחרות, הפרשם מתחלק ב11.

1. נתון משולש שווה צלעות, אורך כל צלע=2. הוכיחו שאם נמקם 5 נקודות במשולש אז קיימות 2 נק' שהמרחק ביניהן .

## פתרון

שובכים: . לפי עקרון שובך היונים קיים משולש קטן ובו לפחות 2 נקודות, המרחק בין 2 נקודות אלו

נתון ריבוע 2X2\ ובו 9 נקודות. הוכיחו שקיימות 3 נקודות כך שהמרחק בין כל 2 מהן

## פתרון

נחלק את הריבוע ל4 רבעים, ואז לפי עקרון שובך היונים המורחב קיים שובך ובו לפחות נקודות. עבור 3 נקודות אלו המרחק בין כל 2 מהן

הוכיחו שמספר האפשרויות לפזר n>0 כדורים שונים בk>0 תאים שונים באופן שלפחות תא אחד ישאר ריק הוא

## פתרון

אנחנו רוצים שלפחות תא אחד ישאר ריק – תא ראשון ריק() או תא שני ריק() או ... או תא k ריק(). אנחנו רוצים את האיחוד של כל האפשרויות:

# הוכח או הפרך

1. תהיינה פונקציות ו מוגדרת ע"י . אם f וg על אז h על
2. ותהי ע"י . אם f חח"ע אז חח"ע
3. פונ'. אם חח"ע אז f חח"ע
4. פונ'. אם אז

## פתרון

1. נפריך ע"י דוגמה: , על, , h לא על.
2. נפריך ע"י דוגמה: אם אזי לכן לא חח"ע.
3. נניח יהיו , ⇦ ⇦ .  
   דרך נוספת: תזכורת: חח"ע ⬄ f הפיכה משמאל כלומר קיימת כך ש.  
   נתון חח"ע, לכן קיימת g כך ש לכן f הפיכה משמאל לכן היא חח"ע.
4. נפריך ע"י דוגמה: , , .  
   דוגמאות נוספות:

# תרגיל

יהיו יח"ש על A. הוכיחו יח"ש על A.

## פתרון

רפלקסיביות: יהי , לכל ⇦

סימטריות: נניח ש ⇦ לכל ⇦ לכל ⇦

טרנזיטיביות: נניח ש ⇦ לכל ⇦ לכל ⇦

# תרגיל

סדרות בינאריות. מחפשים מופע של 010 משמאל לימין, כשמוצאים אותו ה0 הימני לא נחשב בהמשך החיפוש. למשל: 010 - מופיע בחמישי ובתשיעי

מצאו נוסחה רקורסיבית למציאת מספר הסדרות באורך n בהן 010 מופיע במקום הn.

## פתרון

נגדיר עבור מספר הסדרות כך שמופיע במקום הn 010 לפי הכלל לעיל. . סה"כ סדרות שיש 010 במקום הn . מתוכן יש להוריד את הסדרות בהן יש 010 (תקין) במקום ה, וכאלה יש . לכן *.*

*על נגדיר 2 יחסים . לכל :. הוכיחו או הפריכו:  
1) S יח"ש. 2) T יח"ש. 3) יח"ש*

## פתרון

1) S הינו היחס :

2) T אינו יחס שקילות: ⇦ T לא רפלקסיבי

3) נכון. רפלקסיביות: יהי . S יחס שקילות, בפרט רפלקסיבי, לכן ⇦   
סימטריות: יהיו , נניח ש ⇦ או . אם אזי . אם ⇦ ⇦ ⇦ . סה"כ אם ⇦   
טרנזיטיביות: יהיו . נניח ש. אם אזי . אם ⇦ ⇦ ⇦ ⇦ . אם – אותו דבר שכן S,T סימטריים. אם ⇦ ⇦ ⇦ ⇦ .

### מחלקות השקילות של הן:

⇦ וכן הלאה. לכן מחלקות השקילות הן

A,B קבוצות סופיות, .

1. כמה יחסים שונים ניתן להגדיר מעל A
2. כמה פונקציות יש מA לB
3. כמה פונקציות חח"ע יש מA לB
4. כמה פונקציות חח"ע ועל יש מA לB
5. כמה יח"ש מעל A מקיימים "כל מחלקות השקילות הן בעלות 3 איברים בדיוק"?

## פתרון

1. , לכן אנחנו מחפשים את
2. מסמנים , ומתקיים
3. 0 – הם לא באותו גודל
4. נניח שמחלקות השקילות שונות – נבחר 3 לכל אחת . אבל מחלקות השקילות הן שונות, לכן נבטל את הסדר הפנימי() ונקבל

נבחר  *כאשר . הוכיחו שקיימות 2 נקודות מתוך ה5 שבחרנו כך שנקודת האמצע שלהן ב.*

## פתרון

נבנה 4 שובכים: (זוגי, זוגי), (א"ז, זוגי), (זוגי, א"ז), (א"ז, א"ז), ואז לפחות שובך אחד יכיל לפחות 2 נקודות, שנקודת האמצע שלהן תהיה ב

בכמה אופנים ניתן למקם n כדורים בm תאים שונים כך שהתא הראשון לא ישאר ריק?

1. כל הכדורים שונים
2. כל הכדורים זהים

## פתרון

1. סך כל האפשרויות הוא , אבל נרצה להוריד את האפשרויות בהן התא הראשון נשאר ריק, לכן סה"כ יש אפשרויות.
2. צריך למצוא את מספר הפתרונות השלמים למשוואה כאשר ו. התשובה תהיה

בכמה דרכים שונות ניתן לסדר 4 ישראלים, 3 צרפתים ו5 סינים בשורה כך שאף לאום לא יעמוד כבלוק רציף?

## פתרון

ישראלי לא כבלוק רציף() וגם צרפתי לא כבלוק רציף() וגם סיני לא כבלוק רציף().